

# Théorème d'Erdős-Kac dans presque tous les petits intervalles

Élie GOUDOUT

## Abstract

We show that the Erdős-Kac theorem is valid in almost all intervals  $[x, x+h]$  as soon as  $h$  tends to infinity with  $x$ . We also show that for all  $k$  near  $\log \log x$ , almost all interval  $\left[x, x + \exp\left((\log \log x)^{1/2+\varepsilon}\right)\right]$  contains the expected number of integers  $n$  such that  $\omega(n) = k$ . These results are a consequence of the methods introduced by Matomäki and Radziwiłł to estimate sums of multiplicative functions over short intervals.

## Résumé

On démontre que le théorème d'Erdős-Kac est valable dans presque tous les intervalles  $[x, x+h]$  dès que  $h$  tend vers l'infini avec  $x$ . On démontre aussi que pour tout  $k$  proche de  $\log \log x$ , presque tout intervalle  $\left[x, x + \exp\left((\log \log x)^{1/2+\varepsilon}\right)\right]$  contient le nombre attendu d'entiers  $n$  tels que  $\omega(n) = k$ . Ces résultats sont des conséquences des méthodes de Matomäki et Radziwiłł sur les fonctions multiplicatives dans les petits intervalles.

## 1 Introduction

Pour  $n \geq 1$ , on note  $\omega(n)$  le nombre de facteurs premiers distincts de  $n$ . Cette fonction admet la fonction  $n \mapsto \log_2 n$  comme ordre normal<sup>1</sup>. En 1939, Erdős et Kac montrent que la répartition de  $\omega$  suit une loi normale. En 1958, Rényi et Turán améliorent leur résultat de la manière suivante.

**Théorème** (Erdős & Kac [4] ; Rényi & Turán [9]). *Uniformément pour  $X \geq 20$  et  $y \in \mathbb{R}$ , on a*

$$\frac{1}{X} \# \left\{ 1 \leq n \leq X : \omega(n) \leq \log_2 X + y \sqrt{\log_2 X} \right\} = \Phi(y) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log_2 X}}\right),$$

où

$$\Phi(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\tau^2/2} d\tau. \quad (1)$$

---

<sup>1</sup>Pour  $k \geq 2$ ,  $\log_k$  désigne la fonction  $\log$  itérée  $k$  fois. Par exemple,  $\log_2 x = \log \log x$ .

Comme précisé après le théorème III.4.15 de [10], le terme d'erreur, s'il est indépendant de  $y$ , est optimal. En 1981, Babu [1] a montré que le même résultat (sans terme d'erreur) était valable dans tous les intervalles  $(x, x + h]$  lorsque  $y \in \mathbb{R}$  est fixé dès que  $h \geq x^{a(x)/(\log_2 x)^{1/2}}$  où  $a(x) \rightarrow +\infty$ . On montre ici que, lorsque  $h$  tend vers l'infini arbitrairement lentement avec  $x$ , le résultat se vérifie dans presque tous les intervalles  $(x, x + h]$ . Par ailleurs, Delange [3] a montré en 1959 que le  $O\left((\log_2 X)^{-1/2}\right)$  pouvait être remplacé par

$$\frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi \log_2 X}} \left( \frac{2}{3} - c_1 - \frac{y^2}{6} - \left\langle \log_2 X + y\sqrt{\log_2 X} \right\rangle \right) + O\left(\frac{1}{\log_2 X}\right),$$

où

$$c_1 := \gamma + \sum_p \left( \log \left( 1 - \frac{1}{p} \right) + \frac{1}{p} \right) \simeq 0,261497 \quad (2)$$

est la constante de Mertens, et  $\langle t \rangle$  désigne la partie fractionnaire de  $t \in \mathbb{R}$ . Ce résultat peut être retrouvé par les méthodes développées par Esseen dans sa thèse [5, p. 53-59], avec un terme d'erreur légèrement plus faible. On s'en inspire donc pour retrouver l'analogue du résultat de Delange dans les petits intervalles. Pour  $20 \leq h \leq X$ ,  $x \in [X, 2X]$  et  $y \in \mathbb{R}$ , on définit alors

$$F_{(x, x+h]}(y) := \frac{1}{h} \# \left\{ x < n \leq x + h : \omega(n) \leq \log_2 X + y\sqrt{\log_2 X} \right\}, \quad (3)$$

$$\Phi_X(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\tau^2/2} d\tau + \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi \log_2 X}} \left( \frac{2}{3} - c_1 - \frac{y^2}{6} - \left\langle \log_2 X + y\sqrt{\log_2 X} \right\rangle \right). \quad (4)$$

**Théorème 1.** *Uniformément pour  $20 \leq h \leq X$  et  $\alpha \geq 1$ , on a*

$$\|F_{(x, x+h]} - \Phi_X\|_{\infty} \ll \frac{\log_3 X}{\log_2 X} + \alpha^2 \frac{(\log_2 h)^2}{\log h}$$

*pour tout  $x \in [X, 2X]$  sauf sur un ensemble de mesure au plus*

$$\ll X \left( \frac{1}{(\log h)^{\alpha}} + \frac{1}{(\log X)^{1/150}} \right).$$

Le paramètre  $\alpha \geq 1$  pouvant varier uniformément, on peut diminuer la taille de l'ensemble exceptionnel au prix d'une légère perte sur le terme d'erreur, en prenant par exemple  $\alpha = \log_2 h$ . On note qu'il est possible, avec la méthode d'Esseen, d'augmenter la précision de  $\Phi_X$  pour remplacer le  $O\left(\frac{\log_3 X}{\log_2 X}\right)$  par  $o\left((\log_2 X)^{-n/2}\right)$  pour tout  $n \geq 1$  fixé. On renvoie le lecteur intéressé à [5, p. 60-61]. Il semble par ailleurs possible d'obtenir  $F_{(x, x+h]}(y) \sim \Phi(y)$  pour  $y$  fixé, pour presque tout  $x$ , par la méthode des moments qui est plus élémentaire.

Pour  $k \geq 1$ , on note  $\pi_k(x) := \#\{n \leq x : \omega(n) = k\}$ . La bonne qualité du terme d'erreur du Théorème 1 permet de retrouver  $\pi_k(x+h) - \pi_k(x)$  pour des  $k$  normaux et  $h$  suffisamment grand. Il est cependant possible de faire cela en s'intéressant directement aux lois locales.

**Théorème 2.** Soient  $\varepsilon > 0$  fixé et  $X \geq 20$ . Soient  $h \leq X$  et  $k$  un entier tels que

$$|k - \log_2 X| \ll \sqrt{\log_2 X}, \quad (5)$$

$$h \geq \exp((\log_2 X)^{1/2+\varepsilon}). \quad (6)$$

Alors, pour presque tout  $x \sim X$ , on a

$$\pi_k(x+h) - \pi_k(x) \sim \frac{h}{\log X} \frac{(\log_2 X)^{k-1}}{(k-1)!}. \quad (7)$$

On peut aussi obtenir ce résultat lorsque  $k \in [\delta \log_2 X, (e - \delta) \log_2 X]$  pour  $\delta > 0$  fixé, ce que le Théorème 1 ne nous permet pas de faire, mais la borne inférieure sur  $h$  est alors bien moins bonne. On obtient en effet la condition  $h \geq \exp((\log X)^{r \log r - r + 1 + \varepsilon})$  où l'on a posé  $r := \frac{k}{\log_2 X}$  et  $\varepsilon > 0$  est fixé. La relation asymptotique  $\pi_{[\log_2 x]}(x) \sim \frac{x}{\sqrt{2\pi \log_2 x}}$  nous suggère que la condition (6) pourrait être remplacée par  $\frac{h}{\sqrt{\log_2 X}} \rightarrow +\infty$ . Un travail en cours permettra de vérifier cela. Pour montrer les deux théorèmes, l'ingrédient principal est la proposition suivante.

**Proposition 3.** Uniformément pour tous  $A, B > 1$ , pour toute fonction  $\vartheta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , pour tous  $3 \leq h \leq X$  et pour tout  $\delta > 0$ , si l'on pose  $I_{A,B} = [-A, -\frac{1}{B}] \cup [\frac{1}{B}, A]$ , alors

$$\int_{I_{A,B}} \left| \frac{1}{h} \sum_{x < n \leq x+h} e^{i\vartheta(\tau)\omega(n)} - \frac{1}{X} \sum_{X < n \leq 2X} e^{i\vartheta(\tau)\omega(n)} \right| \frac{d\tau}{|\tau|} \ll (\log(AB)) \left( \delta + \frac{\log_2 h}{\log h} \right) \quad (8)$$

et

$$\int_{|z|=1} \left| \frac{1}{h} \sum_{x < n \leq x+h} z^{\omega(n)} - \frac{1}{X} \sum_{X < n \leq 2X} z^{\omega(n)} \right| |dz| \ll \delta + \frac{\log_2 h}{\log h} \quad (9)$$

pour tout  $x \in [X, 2X]$  sauf sur un ensemble de mesure au plus

$$\ll X \left( \frac{(\log h)^{1/3}}{\delta^2 h^{\delta/25}} + \frac{1}{\delta^2 (\log X)^{1/50}} \right).$$

Cette proposition, qui est montrée à la section 7.1, découle d'un résultat récent et révolutionnaire de Matomäki et Radziwiłł [7]. L'enjeu est de montrer que presque partout, la moyenne de la fonction arithmétique  $n \mapsto e^{i\vartheta\omega(n)}$  sur  $(x, x+h]$  est proche de sa moyenne sur  $[X, 2X]$ . Dans [7], Matomäki et Radziwiłł traitent le cas des fonctions multiplicatives réelles, et précisent que le champ d'application peut-être étendu de diverses manières, notamment au cas des fonctions qui ne sont pas «  $p^{it}$ -simulatrices » (*pretentious* en anglais, notion développée depuis quelques années par Granville, Soundararajan, et d'autres auteurs). Ainsi, dans [8], Matomäki, Radziwiłł et Tao ont montré que la moyenne d'une fonction multiplicative complexe de module inférieur à 1 et non «  $p^{it}$ -simulatrice » était nulle sur presque tous les petits intervalles. Cependant, dans notre cas,

lorsque  $\vartheta$  tend vers 0 la moyenne n'est plus nulle. On est donc amenés à comparer la moyenne sur les petits intervalles à celle sur un intervalle dyadique  $[X, 2X]$ . Par ailleurs, les intégrales nous amènent à passer par une estimation plus forte sur un sous-ensemble  $\mathcal{S}$  de  $[X, 2X]$ , comme dans [7].

On termine cette introduction en mentionnant un résultat récent de Teräväinen [11], qui a montré que pour tout  $k \geq 3$  fixé et  $\varepsilon > 0$ , presque tout intervalle  $[x, x + (\log x)^{1+\varepsilon}]$  contient un entier  $n$  tel que  $\omega(n) = k$ .

## 2 Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement mon directeur de thèse, Régis de la Bretèche, pour les nombreuses discussions que nous avons eues, et ses suggestions fort utiles. Je remercie par ailleurs Maksym Radziwiłł pour ses remarques pertinentes.

## 3 Notations

La lettre  $p$  est réservée aux nombres premiers. Par conséquent, on écrit par exemple  $\sum_p$  au lieu de  $\sum_{p \text{ premier}}$ . La lettre  $\omega$  désigne la fonction additive qui compte le nombre de facteurs premiers distincts :  $\omega(n) = \sum_{p|n} 1$ . Si  $E$  est un ensemble fini, on note  $\#E$  son cardinal. On écrit  $f \ll g$  ou  $f = O(g)$  (resp.  $f \gg g$ ) pour dire qu'il existe une constante absolue  $C > 0$  telle que  $|f| \leq C|g|$  (resp.  $|f| \geq C|g|$ ). La région de validité de cette inégalité, si elle n'est pas précisée, est claire d'après le contexte. On écrit par exemple  $\ll_\varepsilon$  ou  $O_\varepsilon$  pour signifier que la constante implicite  $C$  peut dépendre de  $\varepsilon$ . La relation  $f \asymp g$  signifie que l'on a simultanément  $f \ll g$  et  $f \gg g$ . On utilise la notation (asymétrique)  $a \sim b$  pour dire  $b < a \leq 2b$ .

## 4 Quelques lemmes classiques

Pour montrer le Théorème 1, on reprend essentiellement la preuve du théorème d'Erdős-Kac qui figure dans [10, théorème III.4.15]. Celle-ci repose principalement sur l'estimation de la somme des  $e^{i\vartheta\omega(n)}$  et sur l'inégalité de Berry-Esseen, qui permet de relier les fonctions de répartition à leur fonction caractéristique. Cependant,  $\Phi_X$  n'est pas exactement une fonction de répartition, elle contient même des discontinuités (défaut qui a été introduit afin d'avoir un meilleur terme d'erreur), on utilise alors des travaux de la thèse d'Esseen, qui permettent de contourner le problème.

**Lemme 4.** *Soit  $m > 0$  un réel fixé. Soit  $F$  une fonction de répartition et  $f$  sa fonction caractéristique définie par*

$$f(\tau) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau x} dF(x).$$

*Soit  $G$  une fonction réelle à variation bornée sur  $\mathbb{R}$ , de fonction caractéristique  $g$ . On suppose les faits suivants vérifiés :*

- $F(-\infty) = G(-\infty)$  et  $F(+\infty) = G(+\infty)$ ,
- si  $G$  est discontinue en deux points  $x$  et  $y$  distincts, alors  $|x - y| > m$ ,
- $G$  est dérivable en tout point de continuité, de dérivée bornée en valeur absolue par  $\|G'\|_\infty$ ,
- $F$  ne peut être discontinue en  $x$  que si  $G$  l'est aussi.

Alors pour tout  $T \gg \frac{1}{m}$ , on a

$$\|F - G\|_\infty \ll \frac{\|G'\|_\infty}{T} + \int_{-T}^T \left| \frac{f(\tau) - g(\tau)}{\tau} \right| d\tau. \quad (10)$$

*Démonstration.* Voir [5, theorem II.2.b]. □

Avant de procéder à la démonstration du Théorème 1, on a besoin des deux lemmes suivants.

**Lemme 5.** Pour  $X \geq 20$ , on a

$$\frac{1}{X} \sum_{n \sim X} |\omega(n) - \log_2 X| \ll \sqrt{\log_2 X}.$$

*Démonstration.* Cette inégalité, qui est initialement due à Turán, est une application directe de l'inégalité de Turán-Kubilius, dont la démonstration se trouve par exemple dans [10, théorème III.3.1]. □

**Lemme 6.** Uniformément pour  $X \geq 3$  et  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{1}{X} \sum_{X < n \leq 2X} e^{it\omega(n)} = A(e^{it}) (\log X)^{e^{it}-1} + O((\log X)^{\cos t-2}),$$

où  $A(z) = 1 + c_1(z-1) + O((z-1)^2)$  dans la région  $z-1 = o(1)$ , où  $c_1$  est définie par (2).

*Démonstration.* Se déduit facilement de [10, théorème II.6.1]. La constante  $c_1$  apparaît comme la dérivée en 1 de la fonction  $z \mapsto \Gamma(z)^{-1} \prod_p \left(1 + \frac{z}{p-1}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^z$ . Pour la calculer, on utilise la relation  $\Gamma'(1) = -\gamma$  (cf. [10, corollaire II.0.7]). □

## 5 Démonstration du Théorème 1

Soient  $20 \leq h \leq X$  et  $x \sim X$ . Majorons  $\|F_{(x, x+h]} - \Phi_X\|_\infty$ . On se restreint à  $h \in \mathbb{N}$  pour des raisons qui apparaissent plus tard. Cela se fait au prix d'un  $O\left(\frac{1}{h}\right)$  qui est négligeable. Dans le but

d'utiliser l'inégalité d'Esseen, on introduit les fonctions caractéristiques, lorsque  $x \sim X$  et  $\tau \in \mathbb{R}$ ,

$$f_{(x,x+h]}(\tau) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau y} dF_{(x,x+h]}(y) = \frac{1}{h} \sum_{x < n \leq x+h} e^{i\tau \frac{\omega(n) - \log_2 X}{\sqrt{\log_2 X}}}, \quad (11)$$

$$\phi_X(\tau) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau y} d\Phi_X(y) = e^{-\frac{\tau^2}{2}} \left( 1 + \frac{i\tau c_1 - i\frac{\tau^3}{6}}{\sqrt{\log_2 X}} \right) + \Delta_X(\tau), \quad (12)$$

où

$$\Delta_X(\tau) := \frac{-i\tau}{2\pi\sqrt{\log_2 X}} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^*} \frac{e^{2i\pi\nu \log_2 X}}{i\nu} e^{-\frac{1}{2}(\tau + 2\pi\nu\sqrt{\log_2 X})^2}. \quad (13)$$

Le calcul pour  $\phi_X(\tau)$  est aisé une fois connu le développement en série de Fourier

$$\frac{1}{2} - \langle t \rangle = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^*} \frac{e^{2i\pi\nu t}}{2i\pi\nu} \quad (t \notin \mathbb{N}).$$

Pour simplifier les notations, on note désormais  $T := \log_2 X$ . Soit  $1 < A \leq T$ . Avec le Lemme 4, on a alors

$$\|F_{(x,x+h]} - \Phi_X\|_\infty \ll \frac{1}{A} + \int_{-A}^A \left| \frac{f_{(x,x+h]}(\tau) - \phi_X(\tau)}{\tau} \right| d\tau. \quad (14)$$

L'intégrale est traitée en deux parties. On se donne  $B > 1$  et on étudie d'abord la contribution de l'intervalle  $[-\frac{1}{B}, \frac{1}{B}]$ . Pour tout  $y \in \mathbb{R}$ , on a  $e^{iy} = 1 + O(y)$ . Alors pour tous  $x \sim X$  et  $\tau \in \mathbb{R}$ , en se rappelant que  $h$  est entier, on obtient

$$f_{(x,x+h]}(\tau) = 1 + O\left(\frac{|\tau|}{\sqrt{T}h} \sum_{x < n \leq x+h} |\omega(n) - T|\right).$$

Par ailleurs, pour  $|\tau| \leq 1$  on a  $\phi_X(\tau) = 1 + O(|\tau|)$ . Alors

$$I(x) := \int_{-1/B}^{1/B} \left| \frac{f_{(x,x+h]}(\tau) - \phi_X(\tau)}{\tau} \right| d\tau \ll \frac{1}{B} + \frac{1}{B\sqrt{T}h} \sum_{x < n \leq x+h} |\omega(n) - T|,$$

et donc

$$\frac{1}{X} \int_X^{2X} I(x) dx \ll \frac{1}{B} + \frac{1}{B\sqrt{T}hX} \int_X^{2X} \sum_{x < n \leq x+h} |\omega(n) - T| dx.$$

En intégrant par rapport à  $x$ , chaque  $|\omega(n) - T|$  pour  $n \in (X, 2X + h]$  apparaît moins de  $h$  fois. Ainsi, avec le Lemme 5, comme  $h \leq X$  on obtient

$$\frac{1}{X} \int_X^{2X} I(x) dx \ll \frac{1}{B}.$$

Ainsi, pour tout  $\delta_1 > 0$ , on a la majoration

$$I(x) \ll \frac{\delta_1}{B} \quad (15)$$

pour tout  $x \sim X$  sauf sur un ensemble de mesure au plus

$$\ll \frac{X}{\delta_1}. \quad (16)$$

Majorons maintenant la contribution des  $\tau \in I_{A,B} := [-A, -\frac{1}{B}] \cup [\frac{1}{B}, A]$ , à l'aide de (8) de la Proposition 3. Pour cela, on introduit pour  $y \in \mathbb{R}$

$$F_X(y) := \frac{1}{X} \# \left\{ n \sim X : \omega(n) \leq \log_2 X + y \sqrt{\log_2 X} \right\}, \quad (17)$$

et sa fonction caractéristique, pour  $\tau \in \mathbb{R}$ ,

$$f_X(\tau) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau y} dF_X(y) = \frac{1}{X} \sum_{n \sim X} e^{i\tau \frac{\omega(n) - \log_2 X}{\sqrt{\log_2 X}}}. \quad (18)$$

Alors pour tout  $x \sim X$ ,

$$\int_{I_{A,B}} \left| \frac{f_{(x,x+h]}(\tau) - \phi_X(\tau)}{\tau} \right| d\tau \ll I_1(x) + I_2 \quad (19)$$

où

$$I_1(x) := \int_{I_{A,B}} |f_{(x,x+h]}(\tau) - f_X(\tau)| \frac{d\tau}{|\tau|},$$

$$I_2 := \int_{I_{T,B}} \left| \frac{f_X(\tau) - \phi_X(\tau)}{\tau} \right| d\tau.$$

puisque  $A \leq T$ . Avec (8) de la Proposition 3, pour tout  $\delta_2 > 0$  on a

$$I_1(x) \ll (\log(AB)) \left( \delta_2 + \frac{\log_2 h}{\log h} \right) \quad (20)$$

pour tout  $x \sim X$  sauf sur un ensemble de mesure au plus

$$\ll X \left( \frac{(\log h)^{1/3}}{\delta_2^2 h^{\delta_2/25}} + \frac{1}{\delta_2^2 (\log X)^{1/50}} \right). \quad (21)$$

Par ailleurs, uniformément pour  $|\tau| \leq T^{1/6}$ , avec (12) et le Lemme 6 on a

$$|f_X(\tau) - \phi_X(\tau)| \ll e^{-\frac{\tau^2}{2}} \frac{|\tau|^2 + |\tau|^6}{T} + \frac{1}{\log X}.$$

De plus, pour tout  $|t| \leq \pi$ , on a  $\cos t - 1 \leq -\frac{2}{\pi^2}t^2$ . Donc toujours avec le Lemme 6, pour tout  $T^{1/6} \leq |\tau| \leq \pi\sqrt{T}$ , on a

$$|f_X(\tau) - \phi_X(\tau)| \ll \exp\left(-\frac{2}{\pi^2}\tau^2\right). \quad (22)$$

On a alors

$$I_2 \ll \frac{1}{T} + \frac{\log(TB)}{\log X} + \int_{\pi\sqrt{T}}^T \left| \frac{f_X(\tau) - \Delta_X(\tau)}{\tau} \right| d\tau. \quad (23)$$

Il reste à traiter la dernière intégrale. La fonction  $\Delta_X$  est concentrée autour des multiples entiers de  $2\pi\sqrt{T}$ . C'est aussi le cas de la fonction  $f_X$ . On découpe alors cette intégrale en fonction de l'entier en question. On veut donc majorer, pour  $1 \leq k \leq \frac{\sqrt{T}}{2\pi}$ ,

$$J_k := \int_{2\pi(k-\frac{1}{2})\sqrt{T}}^{2\pi(k+\frac{1}{2})\sqrt{T}} \left| \frac{f_X(\tau) - \Delta_X(\tau)}{\tau} \right| d\tau = \int_{-\pi\sqrt{T}}^{\pi\sqrt{T}} \left| \frac{f_X(2k\pi\sqrt{T} + u) - \Delta_X(2k\pi\sqrt{T} + u)}{2k\pi\sqrt{T} + u} \right| du.$$

Concernant la somme  $\Delta_X$ , seul le terme pour  $\nu = -k$  contribue de manière non négligeable à  $J_k$ . Ce terme vaut, en  $\tau = 2k\pi\sqrt{T} + u$ ,

$$\frac{2k\pi\sqrt{T} + u}{2\pi\sqrt{T}} \frac{e^{-2ik\pi T}}{k} e^{-\frac{u^2}{2}} = e^{-2ik\pi T} e^{-\frac{u^2}{2}} \left( 1 + \frac{u}{2k\pi\sqrt{T}} \right).$$

Par ailleurs,  $\tau \mapsto e^{i\tau\sqrt{T}} f_X(\tau)$  est  $2\pi\sqrt{T}$ -périodique. On a donc  $f_X(2k\pi\sqrt{T} + u) = e^{-2ik\pi T} f_X(u)$ . Ainsi, on peut écrire

$$J_k \ll \frac{1}{k\sqrt{T}} \int_{-\pi\sqrt{T}}^{\pi\sqrt{T}} \left| f_X(u) - e^{-\frac{u^2}{2}} \right| du + \frac{1}{kT} + e^{-T},$$

où le dernier terme provient de la somme des termes  $\nu \neq -k$ . L'intégrale ci-dessus se majore de la même manière que précédemment, et on obtient alors  $J_k \ll \frac{1}{kT} + \frac{1}{\log X}$ . En sommant et en utilisant avec (23), il vient alors

$$I_2 \ll \frac{\log T}{T} + \frac{T \log(TB)}{\log X}. \quad (24)$$

Finalement, avec (14), (15), (16), (19), (20), (21) et (24), on a pour tous  $\delta_1, \delta_2 > 0$

$$\|F_{(x, x+h]} - \Phi_X\|_\infty \ll \frac{1}{A} + \frac{\log T}{T} + \frac{\delta_1}{B} + (\log(AB)) \left( \delta_2 + \frac{\log_2 h}{\log h} \right) + \frac{T \log(TB)}{\log X} \quad (25)$$

pour tout  $x \sim X$  sauf sur un ensemble de mesure au plus

$$\ll X \left( \frac{1}{\delta_1} + \frac{(\log h)^{1/3}}{\delta_2^2 h^{\delta_2/25}} + \frac{1}{\delta_2^2 (\log X)^{1/50}} \right). \quad (26)$$



Pour finir, il suffit de choisir  $A, B, \delta_1$  et  $\delta_2$  convenablement. On se donne  $\alpha \geq 1$ . Dans le cas  $\alpha \geq (\log X)^{1-\frac{2}{150}}$ , le résultat est trivial puisque  $\log h \leq \log X$  et  $\|F_{(x, x+h]} - \Phi_X\|_\infty \ll 1$ . Dans le cas  $\alpha \leq (\log X)^{1-\frac{2}{150}}$  et  $\frac{\log h}{\alpha \log_2 h} \leq (\log X)^{\frac{1}{150}}$ , on choisit

$$A = \min(\log h, T), \quad B = (\log h)^{10\alpha+1}, \quad \delta_1 = (\log h)^{10\alpha}, \quad \delta_2 = 100\alpha \frac{\log_2 h}{\log h}.$$

Enfin, si  $\frac{\log h}{\alpha \log_2 h} \geq (\log X)^{\frac{1}{150}}$ , on choisit

$$A = T, \quad B = (\log X)^2, \quad \delta_1 = \log X, \quad \delta_2 = 100 (\log X)^{-\frac{1}{150}}.$$

□

## 6 Démonstration du Théorème 2

Soit  $k \geq 1$ . Soient  $20 \leq h \leq X$  et  $x \sim X$ . Avec la formule de Cauchy, on a

$$\left| \pi_k(x+h) - \pi_k(x) - \frac{h}{X} (\pi_k(2X) - \pi_k(X)) \right| = \left| \frac{h}{2i\pi} \int_{|z|=1} \left( \frac{1}{h} \sum_{x < n \leq x+h} z^{\omega(n)} - \frac{1}{X} \sum_{X < n \leq 2X} z^{\omega(n)} \right) \frac{dz}{z^{k+1}} \right|.$$

Ainsi, avec la majoration (9) de la Proposition 3 lorsque  $\delta = 100 \frac{\log_2 h}{\log h}$ , on obtient

$$\left| \pi_k(x+h) - \pi_k(x) - \frac{h}{X} (\pi_k(2X) - \pi_k(X)) \right| \ll h \frac{\log_2 h}{\log h} \quad (27)$$

pour presque tout  $x \sim X$  lorsque  $h$  tend vers l'infini. Par ailleurs, avec [10, théorème II.6.4], uniformément pour  $k = \log_2 X + O(\sqrt{\log_2 X})$ , on a

$$\frac{\pi_k(2X) - \pi_k(X)}{X} \sim \frac{1}{\log X} \frac{(\log_2 X)^{k-1}}{(k-1)!} \asymp \frac{1}{\sqrt{\log_2 X}}. \quad (28)$$

On en déduit le résultat recherché lorsque  $h \geq \exp((\log_2 X)^{1/2+\varepsilon})$  pour un certain  $\varepsilon > 0$  fixé. □  
Comme précisé dans l'introduction, la preuve fonctionne lorsque  $k \in [\delta \log_2 X, (e - \delta) \log_2 X]$  avec  $\delta > 0$  fixé, mais on obtient alors une moins bonne borne inférieure pour  $h$ .

## 7 Estimation du type Matomäki-Radziwiłł

La Proposition 3 se déduit de la Proposition 7 ci-dessous, qui est une conséquence directe de [7]. On commence par énoncer la Proposition 7, dont la démonstration est donnée à la section 7.2, et on montre comment en déduire la Proposition 3.

## 7.1 Première simplification : définition de l'ensemble $\mathcal{S}$ et rétrécissement de l'intervalle de sommation

Soit  $X \geq 20$ . La Proposition 3 découle d'une meilleure estimation sur un sous-ensemble dense  $\mathcal{S}_X \subset [X, 2X]$  défini de la manière suivante. Soit  $\eta \in (0, \frac{1}{6})$ . On considère la suite d'intervalles  $[P_j, Q_j]$  définis comme ceci :

- $1 \leq (\log Q_1)^{40/\eta} \leq P_1 \leq Q_1 \leq \exp(\sqrt{\log X})$ ,
- pour  $1 \leq j \leq J$ ,  $P_j = \exp\left(j^{4j} (\log Q_1)^{j-1} (\log P_1)\right)$ ,
- pour  $1 \leq j \leq J$ ,  $Q_j = \exp\left(j^{4j+2} (\log Q_1)^j\right)$ ,

où  $J$  est défini comme le maximum des indices  $j$  pour lequel  $Q_j \leq \exp(\sqrt{\log X})$ . On a donc  $J \ll \frac{\log_2 X}{\log_3 X}$ . On définit alors  $\mathcal{S}_X$  comme l'ensemble des entiers de  $[X, 2X]$  qui contiennent au moins un facteur premier dans chacun des  $[P_j, Q_j]$  pour  $1 \leq j \leq J$ . On remarque que

$$\frac{\log P_j}{\log Q_j} = \frac{1}{j^2} \frac{\log P_1}{\log Q_1}, \quad (1 \leq j \leq J)$$

et donc, par le lemme fondamental du crible, l'ensemble  $[X, 2X] \setminus \mathcal{S}_X$  a une densité  $\ll \frac{\log P_1}{\log Q_1}$ .

**Proposition 7.** Soit  $\eta \in (0, \frac{1}{6})$  fixé. Alors uniformément pour  $2 \leq h \leq h_2 = \frac{X}{(\log X)^{1/5}}$  et  $\vartheta \in \mathbb{R}$ , si  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_X$  est défini comme ci-dessus avec  $[P_1, Q_1] \subset [1, h]$ , on a

$$\frac{1}{X} \int_X^{2X} \left| \frac{1}{h} \sum_{\substack{x < n \leq x+h \\ n \in \mathcal{S}}} e^{i\vartheta\omega(n)} - \frac{1}{h_2} \sum_{\substack{x < n \leq x+h_2 \\ n \in \mathcal{S}}} e^{i\vartheta\omega(n)} \right|^2 dx \ll \frac{(\log h)^{1/3}}{P_1^{1/6-\eta}} + \frac{1}{(\log X)^{1/50}}.$$

Cette proposition est l'analogue de ce que l'on obtient en combinant [7, lemma 14] et [7, proposition 1]. Elle est démontrée à la section 7.2. On énonce maintenant deux lemmes qui nous permettent de vérifier que la Proposition 7 implique bien la Proposition 3.

**Lemme 8.** Soit  $X \geq 3$ . Uniformément pour  $\vartheta \in \mathbb{R}$ ,  $x \sim X$  et  $\frac{X}{(\log X)^{1/5}} \leq y \leq X$ , on a

$$\frac{1}{y} \sum_{x < n \leq x+y} e^{i\vartheta\omega(n)} = \frac{1}{X} \sum_{n \sim X} e^{i\vartheta\omega(n)} + O\left((\log X)^{\cos \vartheta - 9/5}\right).$$

*Démonstration.* Se déduit du Lemme 6. □

**Lemme 9.** *Il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tous  $3 \leq h_2 \leq X$ ,  $x \sim X$  et  $3 \leq P \leq Q \leq \exp(\sqrt{\log X})$  on ait*

$$\#\left\{x < n \leq x + h_2 : \left(n, \prod_{P < p \leq Q} p\right) = 1\right\} = h_2 \prod_{P < p \leq Q} \left(1 - \frac{1}{p}\right) + O\left(X \exp\left(-c\sqrt{\log X}\right)\right).$$

*Démonstration.* C'est une conséquence directe de [6, theorem 6.1] avec par exemple  $D = X^{1/2}$  et  $z = \exp(\sqrt{\log X})$ .  $\square$

On peut désormais montrer la Proposition 3.

*Démonstration de la Proposition 3.* On ne détaille ici que l'obtention du premier point (8), le second se traitant de manière tout à fait analogue. Soient  $A, B > 1$ ,  $\delta > 0$  et  $\vartheta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Soient  $3 \leq h \leq X$ . Si  $h \geq h_2 := \frac{X}{(\log X)^{1/5}}$ , le résultat est directement obtenu par l'application du Lemme 8 puisque l'on peut imposer  $\delta \gg (\log X)^{-1/99}$ . On suppose donc désormais  $h \leq h_2$ . Pour tout  $x \sim X$ , avec le Lemme 8 on a

$$\int_{I_{A,B}} \left| \frac{1}{h_2} \sum_{x < n \leq x+h_2} e^{i\vartheta(\tau)\omega(n)} - \frac{1}{X} \sum_{n \sim X} e^{i\vartheta(\tau)\omega(n)} \right| \frac{d\tau}{|\tau|} \ll \frac{\log(AB)}{(\log X)^{4/5}}. \quad (29)$$

On prend  $\mathcal{S}$  comme dans la Proposition 7 avec  $[P_1, Q_1] \subset [1, h]$ . On effectue la manipulation suivante (qui se trouve dans [7]) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \sum_{\substack{x < n \leq x+h \\ n \notin \mathcal{S}}} 1 &= 1 - \frac{1}{h} \sum_{\substack{x < n \leq x+h \\ n \in \mathcal{S}}} 1 + O\left(\frac{1}{h}\right) \\ &= \frac{1}{h_2} \sum_{\substack{x < n \leq x+h_2 \\ n \in \mathcal{S}}} 1 - \frac{1}{h} \sum_{\substack{x < n \leq x+h \\ n \in \mathcal{S}}} 1 + \frac{1}{h_2} \sum_{\substack{x < n \leq x+h_2 \\ n \notin \mathcal{S}}} 1 + O\left(\frac{1}{h}\right). \end{aligned}$$

Cela nous permet d'écrire, uniformément pour  $\vartheta \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{h} \sum_{x < n \leq x+h} e^{i\vartheta\omega(n)} - \frac{1}{h_2} \sum_{x < n \leq x+h_2} e^{i\vartheta\omega(n)} \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{h} \sum_{\substack{x < n \leq x+h \\ n \in \mathcal{S}}} e^{i\vartheta\omega(n)} - \frac{1}{h_2} \sum_{\substack{x < n \leq x+h_2 \\ n \in \mathcal{S}}} e^{i\vartheta\omega(n)} \right| + \frac{1}{h} \sum_{\substack{x < n \leq x+h \\ n \notin \mathcal{S}}} 1 + \frac{1}{h_2} \sum_{\substack{x < n \leq x+h_2 \\ n \notin \mathcal{S}}} 1 \\ &\leq \left| \frac{1}{h} \sum_{\substack{x < n \leq x+h \\ n \in \mathcal{S}}} e^{i\vartheta\omega(n)} - \frac{1}{h_2} \sum_{\substack{x < n \leq x+h_2 \\ n \in \mathcal{S}}} e^{i\vartheta\omega(n)} \right| + \left| \frac{1}{h} \sum_{\substack{x < n \leq x+h \\ n \in \mathcal{S}}} 1 - \frac{1}{h_2} \sum_{\substack{x < n \leq x+h_2 \\ n \in \mathcal{S}}} 1 \right| + \frac{2}{h_2} \sum_{\substack{x < n \leq x+h_2 \\ n \notin \mathcal{S}}} 1 + O\left(\frac{1}{h}\right). \end{aligned}$$

D'après le Lemme 9, il existe une constante  $c' > 0$  telle que

$$\frac{1}{h_2} \sum_{\substack{x < n \leq x+h_2 \\ n \notin \mathcal{S}}} 1 \ll \sum_{j=1}^J \frac{\log P_j}{\log Q_j} + \exp\left(-c' \sqrt{\log X}\right) \ll \frac{\log P_1}{\log Q_1}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \int_{I_{A,B}} \left| \frac{1}{h} \sum_{x < n \leq x+h} e^{i\vartheta(\tau)\omega(n)} - \frac{1}{X} \sum_{n \sim X} e^{i\vartheta(\tau)\omega(n)} \right| \frac{d\tau}{|\tau|} \\ \ll (\log AB) \left( \frac{\log P_1}{\log Q_1} + \frac{1}{(\log X)^{4/5}} \right) + J_1(x) + J_2(x), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} J_1(x) &:= \int_{I_{A,B}} \left| \frac{1}{h} \sum_{\substack{x < n \leq x+h \\ n \in \mathcal{S}}} e^{i\vartheta(\tau)\omega(n)} - \frac{1}{h_2} \sum_{\substack{x < n \leq x+h_2 \\ n \in \mathcal{S}}} e^{i\vartheta(\tau)\omega(n)} \right| \frac{d\tau}{|\tau|}, \\ J_2(x) &:= \int_{I_{A,B}} \left| \frac{1}{h} \sum_{\substack{x < n \leq x+h \\ n \in \mathcal{S}}} 1 - \frac{1}{h_2} \sum_{\substack{x < n \leq x+h_2 \\ n \in \mathcal{S}}} 1 \right| \frac{d\tau}{|\tau|}. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} \int_X^{2X} J_1(x)^2 dx &= \int_{I_{A,B}} \int_{I_{A,B}} \frac{1}{|\tau\tau'|} \\ &\times \frac{1}{X} \int_X^{2X} \left| \frac{1}{h} \sum_{\substack{x < n \leq x+h \\ n \in \mathcal{S}}} e^{i\vartheta(\tau)\omega(n)} - \frac{1}{h_2} \sum_{\substack{x < n \leq x+h_2 \\ n \in \mathcal{S}}} e^{i\vartheta(\tau)\omega(n)} \right| \left| \frac{1}{h} \sum_{\substack{x < n \leq x+h \\ n \in \mathcal{S}}} e^{i\vartheta(\tau')\omega(n)} - \frac{1}{h_2} \sum_{\substack{x < n \leq x+h_2 \\ n \in \mathcal{S}}} e^{i\vartheta(\tau')\omega(n)} \right| dx \\ &\times d\tau d\tau'. \end{aligned}$$

En appliquant successivement l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis la Proposition 7 à l'intégrale par rapport à  $x$ , on obtient

$$\frac{1}{X} \int_X^{2X} J_1(x)^2 dx \ll (\log(AB))^2 \left( \frac{(\log h)^{1/3}}{P_1^{1/6-\eta}} + \frac{1}{(\log X)^{1/50}} \right).$$

Ainsi, pour tout  $\delta > 0$ , on a

$$J_1(x) \leq \delta \log(AB)$$

pour tout  $x \sim X$  sauf sur un ensemble de mesure au plus

$$\ll X \left( \frac{(\log h)^{1/3}}{\delta^2 P_1^{1/6-\eta}} + \frac{1}{\delta^2 (\log X)^{1/50}} \right).$$

L'intégrale  $J_2(x)$  se traite exactement de la même façon (avec  $\vartheta(\tau) = 0$ ) et on trouve alors

$$\int_{I_{A,B}} \left| \frac{1}{h} \sum_{x < n \leq x+h} e^{i\vartheta(\tau)\omega(n)} - \frac{1}{X} \sum_{n \sim X} e^{i\vartheta(\tau)\omega(n)} \right| \frac{d\tau}{|\tau|} \ll (\log(AB)) \left( \delta + \frac{\log P_1}{\log Q_1} + \frac{1}{(\log X)^{4/5}} \right)$$

pour tout  $x \sim X$  sauf au plus

$$\ll X \left( \frac{(\log h)^{1/3}}{\delta^2 P_1^{1/6-\eta}} + \frac{1}{\delta^2 (\log X)^{1/50}} \right).$$

On peut omettre le terme  $(\log X)^{-4/5}$  puisque l'on peut imposer  $\delta \gg (\log X)^{-1/99}$ . Pour conclure, on fait le même choix pour  $\eta$ ,  $P_1$  et  $Q_1$  que dans [7, section 9] :

- $\eta = \frac{1}{150}$ ,
- $Q_1 = \min \left( h, \exp \left( \sqrt{\log X} \right) \right)$ ,
- $P_1 = \max \left( h^{\delta/4}, (\log h)^{40/\eta} \right)$  si  $h \leq \exp \left( \sqrt{\log X} \right)$ , sinon  $P_1 = Q_1^{\delta/4}$ .

□

## 7.2 Application du résultat de Matomäki et Radziwiłł

Il nous reste à montrer la Proposition 7. Comme indiqué précédemment, cette proposition est une application directe de [7, lemma 14] et [7, proposition 1] dans le cas où  $f(n) = e^{i\vartheta\omega(n)}$  ; cependant, la proposition 1 de [7] telle quelle, ne s'applique qu'aux fonctions multiplicatives  $f : \mathbb{N} \rightarrow [-1, 1]$  réelles. L'unique point de leur preuve ne couvrant pas le cas  $f(n) = e^{i\vartheta\omega(n)}$  se trouve page 28 de [7], c'est l'estimation

$$\max_{(\log X)^{1/15} \leq |u| \leq 2T^{1+\varepsilon}} |R_{v,H}(1+iu)| \ll (\log X)^{-1/16+o(1)} \cdot \frac{\log Q}{\log P}$$

où

$$R_{v,H}(s) := \sum_{\substack{Xe^{-v/H} \leq n \leq 2Xe^{-v/H} \\ n \in \mathcal{S}}} \frac{f(n)}{n^s} \cdot \frac{1}{\#\{p \in [P, Q] : p|n\} + 1}, \quad (s \in \mathbb{C}) \quad (30)$$

qui est principalement due au fait qu'une fonction réelle n'est pas «  $p^{it}$ -simulatrice » [7, lemma 2]. Ce type de résultat est dû à des travaux initiés par Halász dans les années 1970, puis amplifiés notamment par Granville et Soundararajan. Les fonctions qui nous intéressent ne sont pas «  $p^{it}$ -simulatrices » non plus puisqu'elles sont constantes sur les nombres premiers. Cela nous permet d'adapter la preuve assez simplement. Pour la suite, on se donne l'ensemble  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_X$  défini précédemment et on pose  $P := \exp\left((\log X)^{1-1/48}\right)$ ,  $Q := \exp\left(\frac{\log X}{\log_2 X}\right)$  et  $H := (\log X)^{1/48}$ .

**Proposition 10.** *On suppose  $\mathcal{S}, P, Q$  et  $H$  définis comme ci-dessus. Soit  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Uniformément pour  $3 \leq T \leq X$ ,  $\vartheta \in \mathbb{R}$  et  $v \in [H \log P, H \log Q]$ , lorsque  $f(n) = e^{i\vartheta\omega(n)}$  on a*

$$\max_{(\log X)^{1/15} \leq |u| \leq 2T^{1+\varepsilon}} |R_{v,H}(1+iu)| \ll (\log X)^{-1/16+o(1)} \cdot \frac{\log Q}{\log P},$$

où  $R_{v,H}$  est défini par (30), lorsque  $X$  tend vers l'infini.

La preuve suit le même schéma que dans [7, lemma 3]. Lorsque  $f$  et  $g$  sont deux fonctions multiplicatives de module inférieur à 1 et  $x \geq 1$ , on note

$$\mathbb{D}(f, g, x)^2 = \sum_{p \leq x} \frac{1 - \Re\left(f(p)\overline{g(p)}\right)}{p}.$$

C'est au sens de cette « distance » que l'on montre que nos fonctions ne ressemblent pas à  $n \mapsto n^{it}$ . En effet, on a le lemme suivant.

**Lemme 11.** *Soient  $f$  une fonction multiplicative à valeur dans le disque unité, et*

$$F(s) = \sum_{n \sim x} \frac{f(n)}{n^s}. \quad (x \geq 1, s \in \mathbb{C})$$

Uniformément pour  $T_0 \geq 1$ ,  $t \in \mathbb{R}$  et  $x \geq 1$ , on a

$$|F(1+it)| \ll (1+m)e^{-m} + \frac{1}{T_0}$$

où

$$m = m(x, T_0) := \min_{|t_0| \leq T_0} \mathbb{D}(f, n^{it+it_0}, x)^2.$$

*Démonstration.* Se déduit directement de [10, corollaire III.4.12] par sommation d'Abel.  $\square$

Le lemme suivant permet de contourner la condition non multiplicative  $n \in \mathcal{S}$  — on rappelle que l'ensemble  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_X$  a été défini au début de la section 7.1.

**Lemme 12.** Pour  $\mathcal{J} \subset \{1, \dots, J\}$ , on définit la fonction totalement multiplicative  $g_{\mathcal{J}}$  par

$$g_{\mathcal{J}}(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \notin \bigcup_{j \in \mathcal{J}} [P_j, Q_j] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors pour toute suite  $(a_n)_{n \sim X}$ , on a

$$\sum_{\substack{n \sim X \\ n \in \mathcal{S}}} a_n = \sum_{n \sim X} a_n \prod_{j=1}^J (1 - g_{\{j\}}(n)) = \sum_{\mathcal{J} \subset \{1, \dots, J\}} (-1)^{\#\mathcal{J}} \sum_{n \sim X} a_n g_{\mathcal{J}}(n).$$

Avec ce lemme, on peut se passer de la condition  $n \in \mathcal{S}$  au prix d'un facteur multiplicatif  $2^J = (\log X)^{o(1)}$ .

**Lemme 13.** Soient  $A \geq 1$  et  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$  fixés. Soit  $X \geq 20$ . On suppose  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_X$ ,  $P$  et  $Q$  définis comme précédemment. Alors uniformément pour  $\mathcal{J} \subset \{1, \dots, J\}$ ,  $\vartheta \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq \alpha \leq X^A$  et  $x \in [X^{1/4}, X]$ , on a

$$\mathbb{D}(h_{\mathcal{J}, \vartheta}, n^{i\alpha}, x)^2 \geq \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{48} - \varepsilon \right) \log_2 x + O(1),$$

où  $h_{\mathcal{J}, \vartheta}(n) = g_{\mathcal{J}}(n)e^{i\vartheta\omega(n)}$  lorsque  $n$  n'a aucun facteur premier dans l'intervalle  $[P, Q]$  et  $h_{\mathcal{J}, \vartheta}(n) = 0$  sinon, avec les fonctions  $g_{\mathcal{J}}$  définies au Lemme 12.

*Démonstration.* Puisque  $Q_J \leq \exp(\sqrt{\log X})$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(h_{\mathcal{J}, \vartheta}, n^{i\alpha}, x)^2 &= \sum_{p \leq x} \frac{1 - \Re(h_{\mathcal{J}, \vartheta}(p)p^{-i\alpha})}{p} \\ &\geq \sum_{\substack{\exp((\log x)^{2/3+\varepsilon}) < p \leq \exp((\log x)^{1-1/48})}} \frac{1 - \Re(e^{i\vartheta} p^{-i\alpha})}{p} \\ &\geq \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{48} - \varepsilon \right) \log_2 x + O(1) \\ &\quad + O \left( \sum_{\substack{\exp((\log x)^{2/3+\varepsilon}) < p \leq \exp((\log x)^{1-1/48})}} \frac{\Re(e^{i\vartheta} p^{-i\alpha})}{p} \right). \end{aligned}$$

Par ailleurs,  $\Re(e^{i\vartheta} p^{-i\alpha}) = (\cos \vartheta) \Re(p^{-i\alpha}) - (\sin \vartheta) \Im(p^{-i\alpha})$ . De plus, la région sans zéro de Korobov-Vinogradov pour la fonction zêta nous fournit (voir par exemple ligne (20) de [2])

$$\left| \sum_{\substack{\exp((\log X)^{2/3+\varepsilon}) < p \leq \exp((\log X)^{1-1/48})}} \frac{1}{p^{1+i\alpha}} \right| \ll 1.$$

On a bien le résultat attendu. □

*Démonstration de la Proposition 10.* Grâce aux trois lemmes précédents, il suffit de reprendre la preuve de [7, lemma 3], *mutatis mutandis*. □

## Références

- [1] G. J. BABU : Distribution of the values of  $\omega$  in short intervals. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 40:135–137, 1982.
- [2] M. BALAZARD et G. TENENBAUM : Sur la répartition des valeurs de la fonction d’Euler. *Comp. Math.*, 110:239–250, 1998.
- [3] H. DELANGE : Sur des formules dues à Atle Selberg. *Bull. Sci. Math.*, 83, janvier 1959.
- [4] P. ERDŐS et M. KAC : The Gaussian law of errors in the theory of additive functions. *Proc. N. A. S.*, 25:206–207, 1939.
- [5] C.-G. ESSEEN : Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace–Gaussian law. *Acta Mathematica*, 77(1):1–125, 1945.
- [6] J. FRIEDLANDER et H. IWANIEC : *Opera de Cribro*. Colloquium Publications. American Mathematical Society, juin 2010.
- [7] K. MATÖMAKI et M. RADZIWIŁŁ : Multiplicative functions in short intervals. *Ann. of Math*, à paraître.
- [8] K. MATÖMAKI, M. RADZIWIŁŁ et T. TAO : An averaged form of Chowla’s conjecture. *Algebra & Number Theory*, 9(9):2167–2196, 2015.
- [9] A. RÉNYI et P. TURÁN : On a theorem of Erdős-Kac. *Acta Arithmetica*, 4(1):71–84, 1958.
- [10] G. TENENBAUM : *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*. Belin, quatrième édition, octobre 2015.
- [11] J. TERÄVÄINEN : Almost primes in almost all short intervals. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, à paraître.

*E-mail* : eliegoudout@hotmail.com